

Logaritma

Logaritma Nedir?

Reel sayılardan (R) pozitif reel sayılara tanımlı (R^+) olan ve $f(x) = a^x$ şeklinde ifade edilen fonksiyonlara **üstel fonksiyon** denir. Üstel fonksiyon olarak tanımlı olabilmesi için a , 1 dışında bir pozitif reel sayı olmalıdır ($R^+ - \{1\}$).

Bu fonksiyonun tersi olan fonksiyona ise **logaritma fonksiyon** adı verilir. Logaritma fonksiyon $\log_a x$ şeklinde gösterilir. Burada a ile gösterilen kısma **taban** adı verilir.

Yani, $a^x = k$ olduğu durumda $\log_a k = x$ dir.



Üstel fonksiyon ile logaritma fonksiyon birbirinin tersi olduğundan grafikleri $x = y$ doğrusuna göre simetriktir.

Logaritma Olma Şartları

$\log_a x$ olarak gösterilen bir logaritma fonksiyonun tanımlı olabilmesi için aşağıdaki şartlar sağlanmalıdır, aksi halde fonksiyon tanımsız olur:

- $a \neq 1$
- $x > 0$, yani $x \in R^+$
- $a > 0$

Özel Gösterimli Logaritmalar

Tabanı 10 olan logaritma fonksiyon **onluk logaritma** olarak adlandırılır ve $\log x$ şeklinde gösterilir. Yani, $\log_{10} x = \log x$ dir.

Tabanı e olan logaritma fonksiyon doğal logaritma olarak adlandırılır ve $\ln x$ olarak gösterilir.

Yani, $\log_e x = \ln x$ dir.

Logaritma Fonksiyonun Özellikleri

- Tabanla sayı aynı olursa sonuç 1 çıkar.

$$\log_x x = 1$$

- Sayı 1 olduğunda sonuç 0 çıkar.

$$\log_k 1 = 0$$

- $\log_k(x * y) = \log_k x + \log_k y$
- $\log_k\left(\frac{x}{y}\right) = \log_k x - \log_k y$
- Sayının üzerindeki üs logaritmanın başına çarpım olarak iner.

$$\log_k x^n = n * \log_k x$$

- Tabanın üzerindeki üs logaritmanın başına bölme olarak çıkar.

$$\log_{k^m} x = \frac{1}{m} * \log_k x$$

- Aşağıdaki özelliğe **taban değiştirme** adı verilir.

$$\log_k x = \frac{\log_m x}{\log_m k}$$

- Tabanla sayı yer değiştirdiğinde ifadenin çarpmaya göre tersi alınır.

$$\log_k x = \frac{1}{\log_x k}$$

- Logaritmanın içindeki sayı ile yanındaki logaritmanın tabanındaki sayı aynı olduğunda birbirlerini götürürler. Aşağıdaki ifadede b ve c ler için bu gerçekleşmiştir.

$$\log_a b * \log_b c * \log_c d = \log_a d$$

- Bir sayı ile üssündeki logaritmanın içi yer değiştirebilir.

$$k^{\log_m z} = z^{\log_m k}$$

- Yukarıdaki özelliğin bir sonucu olarak, bir sayının üssündeki logaritmanın tabanı ile kendisi aynıysa birbirlerini götürürler.

$$k^{\log_k x} = x$$

Logaritmik Denklemler

$$\log_2(x - 7) = 3 \text{ denklemini çözelim.}$$

Öncelikli her iki tarafı da 2'nin üssü biçiminde yazalım. Bu durumda denklem $x - 7 = 8$ haline gelir. Bu denklemi çözdüğümüzde $x = 15$ sonucuna ulaşırız.

$$\log_3(x^2 - 7) = \log_3(4x - 10) \text{ denklemini çözelim.}$$

Her iki tarafı da 3'ün üssü halinde yazarak log'lardan kurtuluruz ve $x^2 - 7 = 4x - 10$ denkleminde ulaşırız. Buradan da $x^2 - 4x + 3$ denklemini elde eder ve kökleri 3 ve 1 olarak buluruz. **ANCAK**, 1 sayısı denklemdaki logaritmaların içini negatif yaparak onları tanımsız hale getirir. Bu nedenle denklemin kökü yalnızca 3'dür.



Logaritmik denklem çözerken bulduğumuz köklerin logaritma fonksiyonların içini 0 veya negatif yapmadığından emin olmalıyız.

Logaritmik Eşitsizlikler

$\log_2(x - 3) < 3$ eşitsizliğini çözelim.

Önce her iki tarafı da 2'nin üssü olarak yazalım. Bu sayede eşitsizliği $x - 3 < 8$ haline getirelim. Bu durumda $x < 11$ olur. Ayrıca, logaritmanın içi pozitif olmalı, bu nedenle $x - 3 > 0$. Bu iki eşitsizliği kesiştirirsek $3 < x < 11$ sonucuna ulaşılır.



Logaritmanın tabanı 1'den büyükse eşitsizliğin işareti aynen yazılır. Ancak logaritmanın tabanı 0 ile 1 aralığındaysa eşitsizliğin işareti ters döner ($>$ ise $<$, $<$ ise $>$)