

0.1. İkinci Dereceden Denklemler

Polinom Tanımı

- $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in \mathbb{R}$;
 - $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$
- ifadesi x 'e bağlı n . dereceden polinomdur. Bu ifade 0'a eşitse polinom denklem teşkil eder.
- $a_n \neq 0$ ise bu tür bir denklemin derecesi n 'dir.

Birinci Dereceden Denklem Tanımı

- $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$;
 - $ax + b = 0$
- ifadesi birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemdir.
- Kökü, denklemin
 - $x = -b / a$
- şeklinde düzenlenmesiyle bulunur. ($a \neq 0$ olduğundan denklemin iki tarafı a 'ta bölünebilir)

İkinci Dereceden Denklem Tanımı

- $a, b, c, \in \mathbb{R}, a \neq 0$;
 - $ax^2 + bx + c = 0$
- ifadesi ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemdir.
- Kökü üç farklı yolla bulunur:
 - **İfadeyi Çarpanlarına Ayırma**

x^2 'li Terimin Katsayısının 1'e Eşit Olduğu Denklemler

($a = 1$ olduğundan $ax^2 + bx + c = 0$ denklemini $x^2 + bx + c = 0$ halini alır.)

- p ve q , $p + q = b$ ve $pq = c$ koşullarını sağlayan iki sayı olmak üzere;

- $x^2 + bx + c = 0$

denklemini

- $x^2 + (p + q)x + pq = (x + p)(x + q)$

şeklinde düzenlenir, her iki çarpan ayrı ayrı sıfıra eşitlenerek kökler bulunur:

- $x + p = 0, x = -p$

- $x + q = 0, x = -q$

x^2 'li Terimin Katsayısının 1'e Eşit Olmadığı Denklemler

- a_1 ve a_2 a 'nın, c_1 ve c_2 c 'nin iki çarpanı olmak üzere;
- $a_1 x c_2 + a_2 x c_1 = b$ ise, yani çapraz terimlerin çarpımları toplamı x 'li terimin katsayısına eşitse, denklem karşılıklı terimlerin toplamalarının çarpımı olarak düzenlenir:

- $ax^2 + bx + c = 0 = (a_1 x + c_1)(a_2 x + c_2)$

her iki çarpan ayrı ayrı sıfıra eşitlenerek kökler bulunur:

- $a_1 x + c_1 = 0, x = -c_1 / a_1$

- $a_2 x + c_1 = 0, x = -c_2 / a_2$

- $a_1 x c_1 + a_2 x c_2 = b$ ise, yani karşılıklı terimlerin çarpımları toplamı x 'li terimin katsayısına eşitse, denklem çapraz terimlerin toplamalarının çarpımı olarak düzenlenir:

- $ax^2 + bx + c = 0 = (a_1 x + c_2)(a_2 x + c_1)$

her iki çarpan ayrı ayrı sıfıra eşitlenerek kökler bulunur:

- $a_1 x + c_2 = 0, x = -c_2 / a_1$

- $a_2 x + c_1 = 0, x = -c_1 / a_2$

- **İfadeyi Tam Kare Yapma**
- Baş katsayısı 1 olan birinci dereceden bir polinom için
 - $(x + a)^2 = (x + a)(x + a) = x^2 + 2ax + a^2$

olduğundan, bir polinomun tam kare olabilmesi için sabit terimin x'li terimin katsayısının yarısının karesine eşit olması gerekir.

- Polinom zaten tam kare ise, örneğin

$$\blacksquare x^2 + 2ax + a^2 = 0$$

gibi, denklem tek bir terimin karesi şeklinde yeniden düzenlenir:

$$\blacksquare (x + a)^2 = 0$$

$$\blacksquare x + a = 0$$

$$\blacksquare x = -a$$

- Polinom tam kare değilse, bir terim eklenip (denklemini bozmamak için) çıkartılarak tam kare haline getirilir, ardından yukarıdaki prosedür uygulanır:

$$\blacksquare x^2 + 2ax + a^2 - n = 0$$

$$\blacksquare x^2 + 2ax + a^2 - n + n - n = 0$$

$$\blacksquare x^2 + 2ax + a^2 - n = 0$$

$$\blacksquare (x + a)^2 - n = 0$$

$$\blacksquare (x + a)^2 = n$$

$$\blacksquare x + a = \pm \sqrt{n}$$

$$\blacksquare x = -a \pm \sqrt{n}$$

- Baş katsayısı 1 olmayan, sıfır dışında herhangi bir tam sayı k olan polinomlar için denklemin her iki tarafı k'ya bölünür, ardından yukarıdaki prosedürlerden uygun olanı uygulanır:

- **Formül Kullanarak Kökleri Bulma**

- $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri

- $x_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} / 2a$

formülüyle bulunur. İspat:

- $0 = ax^2 + bx + c = 0$

- $= a(x^2 + bx/a + b^2/4a^2 - b^2/4a^2 + c/a)$

- $= a[(x + bx/a)^2 + (c/a - b^2/4a^2)]$

- $= a[(x + bx/a)^2 + b^2 - 4ac / 4a^2]$

- $= [(x + bx/a)^2 + b^2 - 4ac / 4a^2] \text{ (} a \neq 0 \text{ olduğundan denklemin her iki tarafı } a'ya \text{ bölünebilir.)}$

- $|x + bx/a| = \sqrt{b^2 - 4ac} / 4a^2$

- $= \sqrt{b^2 - 4ac} / 2a$

- $|x| = -b / 2a + \sqrt{b^2 - 4ac} / 2a$

- $x_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} / 2a$

- Bu formüldeki $\sqrt{b^2 - 4ac}$ ifadesine diskriminant denir, Δ (delta) harfi ile gösterilir.

- Diskriminant, denklemin farklı köklerinin sayısını ve ait oldukları kümeyi belirler:

- $\Delta > 0$ ise, formül aynen geçerlidir. Denklemin iki farklı reel kökü vardır, çözüm kümesi iki elemanlıdır.

- $\Delta = 0$ ise,

- $x_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} / 2a$

denklemini

- $x_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} / 2a$

halini alır, yani denklemin iki kökü de eşit (çakışık) ve x'li terimin katsayısının toplama işlemine göre tersinin x²'li terimin katsayısının iki katına bölümüne eşittir. Kökler reeldir, fakat birbirine eşit olduklarından denklemin çözüm kümesi iki değil, bir elemanlıdır.

- $\Delta < 0$ ise, karekök içinde negatif bir ifade bulunduğundan denklemin kökü reel sayılarda tanımlı değildir; denklemin reel kökü yoktur, reel sayılardaki çözüm kümesi boş kümedir. Var olan kökler karmaşık sayılardır.

- **NOT:** $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde a ve c ters işaretliyse diskriminant daima 0'dan büyüktür. İspat:

- $b^2 - 4a(-c) = b^2 + 4ac$

- $b^2 - 4(-a)c = b^2 + 4ac$

- (b^2 terimi kare sayı olması nedeniyle pozitifdir, dolayısıyla $+4ac$ pozitif terimiyle toplamı da pozitif olmak zorundadır.)
- **NOT:** $x^2 + bx + c$ denkleminde sabit terim olan c , denklemi tam kare yapan sayıdan (x 'li terimin katsayısının yarısının karesinden) büyükse diskriminant 0'dan küçük, küçükse büyüktür. İspat:
 - $n \in \mathbb{Z}^+$;
 - $c = b^2 / 4 + n$:
 - $\Delta = b^2 - 4(b^2 / 4 + n) = 4n$
 - $c = b^2 / 4 - n$
 - $\Delta = b^2 - 4(b^2 / 4 - n) = -4n$

İkinci Dereceden Denklemlerde Kök-Katsayı Bağlılıkları

- $ax^2 + bx + c = 0$ ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi için, denklemin kökleri x_1 ve x_2 olmak üzere,
 - Kökler toplamı
 - $x_1 + x_2 = -b / a$
 bağlantısıyla bulunur. İspat:
 - $x_1 + x_2 = (-b + \sqrt{b^2 - 4ac} / 2a) + (-b - \sqrt{b^2 - 4ac} / 2a)$
 - $= -2b + \sqrt{b^2 - 4ac} - \sqrt{b^2 - 4ac} / 2a$
 - $= -b / a$
 - Kökler çarpımı
 - $x_1 x_2 = c / a$
 bağlantısıyla bulunur. İspat:
 - $x_1 x_2 = (-b + \sqrt{b^2 - 4ac} / 2a)(-b - \sqrt{b^2 - 4ac} / 2a)$
 - $= [b^2 + b\sqrt{b^2 - 4ac} - b\sqrt{b^2 - 4ac} - (b^2 - 4ac)] / 4a^2$
 - $= b^2 - b^2 + 4ac / 4a^2$
 - $= c / a$
 - Kökler farkı
 - $x_1 - x_2 = \sqrt{b^2 - 4ac} / |a|$
 bağlantısıyla bulunur. İspat:
 - $|x_1 - x_2| = |(-b + \sqrt{b^2 - 4ac} / 2a) - (-b - \sqrt{b^2 - 4ac} / 2a)|$
 - $= |(-b + \sqrt{b^2 - 4ac} + b + \sqrt{b^2 - 4ac}) / 2a|$
 - $= |2\sqrt{b^2 - 4ac} / 2a|$
 - $= \sqrt{b^2 - 4ac} / |a|$

Kökleri Bilinen İkinci Dereceden Denklemi Yazma

- Baş katsayısı 1, kökleri x_1 ve x_2 olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli polinom denklem
 - $(x - x_1)(x - x_2)$
 şeklinde çarpanlarına ayrılacağından bu denklem
 - $(x - x_1)(x - x_2)$
 - $= x^2 - x_2x - x_1x + x_1x_2$
 - $= x^2 - x(x_1 + x_2) + x_1x_2$
 şeklinde yazılır. Yani köklerin toplamının toplama işlemine göre tersi x 'li terimin, köklerin çarpımı sabit terimin katsayısıdır.
- Eğer söz konusu polinom denklemin baş katsayısı 1 değil, herhangi bir tam sayı k olsaydı, denklem
 - $k[x^2 - x(x_1 + x_2) + x_1x_2]$
 şeklinde yazılırdı.