

SAYMA VE OLASILIK

Faktöriyel

- $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere;
 $n! = n(n-1)(n-2)\dots 1$

$0!=1$ kabul edilir. $0!$ ve $1!$ dışında tüm faktöriyeler çift sayıdır. $4!$ faktöriyel sonrasındaki tüm faktöriyelerin birler basamağındaki rakam 0 'dır.

- Faktöriyeler kendilerinden küçük faktöriyelerin cinsinden yazılabilir. Örneğin $n!$:

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots 1 = n(n-1)!$$

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\dots 1 = n(n-1)(n-2)!$$

...

şeklinde yazılabilir. Aynı ifadeyi kendinden büyük bir faktöriyel cinsinden de yazabiliriz:

$$n! = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)\dots 1}{n+1} = \frac{(n+1)!}{n+1}$$

$$n! = \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)\dots 1}{(n+2)(n+1)} = \frac{(n+2)!}{(n+2)(n+1)}$$

...

ÇK-1 Soru 7: $\frac{3n!}{(3n+1)!} \cdot \frac{(n+2)!}{(n+1)!} = \frac{1}{2}$ olduğuna göre n kaçtır?

$$\frac{1}{3n+1} \cdot n + 2 = \frac{1}{2}, \quad \frac{n+2}{3n+1} = \frac{1}{2}$$

$$2n + 4 = 3n + 1$$

$$-n = -3, \quad n = 3$$

ÇK-1 Soru 8: $\frac{27(n-7)! + (7-n)!}{n}$ işleminin sonucu nedir?

faktöriyel tanımında $n \in \mathbb{N}$ olduğundan;

$$n-7 \geq 0, \quad n \geq 0 \text{ ve } 7-n \geq 0, \quad 7 \geq n$$

$$n = 7$$

$$27 \cdot 0! + 0! / 7 = 28/7 = 4$$

Saymanın Temel İlkesi

- Bir olaylar dizisinde 1. olay n_1 , 2. olay n_2 , ... , r . olay n_r farklı şekilde gerçekleşebilir ise bu olaylar dizisi $n_1 n_2 \dots n_r$ farklı şekilde gerçekleşebilir.

Sırasıyla x, y ve z elemanlı üç kümenin her birinden birer eleman seçmek durumunda; tüm seçimler tek bir olaylar dizisi içinde gerçekleştiği için olaylar dizisi xyz farklı şekilde gerçekleşebilir.

FOKİ Örnek 16: Yukarıdaki şekle göre A'dan D'ye kaç farklı yoldan gidilebilir?

Tüm yollar birbirine bağlıdır, yani olaylar ayn dizi içerisinde.

$$3.2.2 = 12$$

Eğer sırasıyla x, y ve z elemanlı üç kümenin her birinden birer eleman veya sırasıyla a, b ve c elemanlı üç kümenin her birinden birer eleman seçiliyor ise; aynı anda gerçekleşmeyecek (veya bağlacı var) iki farklı olaylar dizisi olduğundan xyz+abc farklı şekilde gerçekleşir.

FOKİ Örnek 17: Yukarıdaki şekle göre A'dan C'ye kaç farklı yoldan gidilebilir?

Farklı 3 dizi vardır.

$$1 + 1 + 3.2 = 8$$

FOKİ Örnek 18: Yukarıdaki şekle göre;

a) A şehrinden C şehrine, B şehrine uğramak koşuluyla kaç farklı yoldan gidilebilir, kaç farklı yoldan gidip gelinebilir?

b) Aynı işlem giderken kullanılan yollar gelirken kullanılmamak şartıyla kaç farklı biçimde gerçekleştirilebilir?

$$a) 3.4 = 12, 12.3.4 = 144$$

$$b) 3.4.3.2 = 72$$

FOKİ Örnek 21: A={0, 1, 2, 3, 5, 7, 8} için bu kümenin elemanlarını kullanarak;

a) 3 basamaklı kaç farklı doğal sayı yazılabilir?

b) 4 basamaklı rakamları birbirinden farklı kaç çift doğal sayı yazılabilir?

c) 3 ile başlayıp 7 ile biten 5 basamaklı kaç farklı doğal sayı yazılabilir?

$$a) 6.7.7 = 294$$

Başta 0 olmas sayı 2 basamaklı yapacağından ilk say 7 değil 6 say arasından seçilir.

$$b) 6.5.4.1 + 5.5.4.2 = 320$$

0'n sonda olduğu ve olmadı durumlar ayrı incelenir.

$$c) 1.7.7.7.1 = 7^3$$

FOKİ Sınıf İçi Uygulama Soru 5: A={1, 2, 3, 4} için; bu kümenin elemanlarıyla yazılabilecek tüm 3 basamaklı rakamları farklı doğal sayılar küçükten büyüğe sıralanırsa baştan 19. sayı ne olur?

$$3.2.1 = 6 \text{ olduğundan her say ile başlayan 6 sayı vardır.}$$

1. ve 6. sıralar aras: 1 ile başlayanlar

7. ve 12. sıralar aras: 2 ile başlayanlar

13. ve 18. sıralar aras: 3 ile başlayanlar

19. sra: 4 ile başlayan en küçük say: 412

Permütasyon

Sonlu bir kümenin belirli bir eleman sayısındaki alt kümelerinin elemanlarının farklı dizilişlerinden her birine o kümenin permütasyonu denir. Örneğin $A = \{a, b, c\}$ kümesinin;

2 elemanlı alt kümeleri: $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$

2'li permütasyonları: ab, ba, ac, ca, bc, cb

3 elemanlı alt kümeleri: $\{a, b, c\}$

3'lü permütasyonları: abc, acb, bca, bac, cba, cab

- $n, r \in \mathbb{Z}^+$ ve $r \leq n$ için;
n elemanlı bir kümenin r'li permütasyonlarının sayısı:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

- Bundan yola çıkarak;
 $P(n, n) = n!$
 $P(n, 1) = n$
 $P(n, 2) = n(n - 1)$
 $P(n, 3) = n(n - 1)(n - 2)$
...

- n farklı eleman düz bir sırada n! farklı şekilde sıralanır.

FOKİ Örnek 29: 4 kız, 4 erkek öğrenci kız öğrencilerden hiçbiri yan yana gelmeyecek şekilde düz bir sırada kaç farklı şekilde sıralanabilir?

dizilim: e - k - e - k - e - k - e - k - e

*k lar kendi aralarında 4!, e'ler kendi aralarında 5! farklı şekilde sıralanır:
4! 5!*

FOKİ Örnek 30: 5 doktor ve 4 asistan her iki doktor arasında bir asistan gelecek şekilde düz bir sırada kaç farklı şekilde sıralanabilir?

dizilim: a - d - a - d - a - d - a - d - a - d - a

baştaki ve sondaki a'lar, aralarında a olmayan d'lere sebep olduklarından kullanılamazlar.

1. asistan 4, 2. asistan 3, ... farklı yere oturabilir: 4!

1. doktor 5, 2. doktor 4, ... farklı yere oturabilir: 5!

4! 5!

ÇK-4 Soru 3: 3 kız, 3 erkek öğrenci herhangi iki kız veya erkek yan yana gelmeyecek şekilde düz bir sırada kaç farklı şekilde sıralanabilir?

dizilim: ? – k – ? – k – ? – k – ?

k'larn kendi aralarında sıralanışlar: 3!

1. e 4, 2. e 3, ... farklı yere gelebilir: 4. 3. 2

2. ve 3. ?'lerinin dolmadığı durumlar koşulu bozar: e – k – k – e – k ve e – k – e – k – k – e
bu durumlardan her birinde e'ler 3! farklı şekilde sıralanır, 2 durum vardır: 3!. 2
e'lerin kendi aralarında sıralanışlar: 4. 3. 2 – 3!. 2 = 12
tüm sıralanışlar: 3!. 12 = 72

Tekrarlı Permütasyon

- Sıralanacak n tane farklı nesnenin n_1 tanesi bir türden, n_2 tanesi başka bir türden, n_r tanesi başka bir türden ise bu nesnelerin farklı sıralanışlarının sayısı:

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}$$

olacaktır.

Örneğin “aabbccc” dizisinden yeni bir dizi oluşturmak istenirse:

toplam 7 karakter; 2 tanesi “a”, 2 tanesi “b”, 3 tanesi “c”:

$$\text{farklı sıralanışların sayısı} = \frac{7!}{2!2!3!}$$

FOKİ Örnek 33: 3556777 sayısının rakamlı yer değiştirilerek;

a) 7 basamaklı kaç farklı sayı yazılabilir?

b) 7 basamaklı kaç farklı çift sayı yazılabilir?

c) 7 basamaklı kaç farklı tek sayı yazılabilir?

a) $7! / 3! 2! = 420$

b) ... 6 şeklinde olmalıdır. Kalan 6 sayıdan seçim yapılır: $6! / 3! 2! = 60$

c) tüm durumdan çift sayılar çıkartılır: $420 - 60 = 360$

FOKİ Örnek 36: Yukarıdaki şekle göre A noktasından B noktasına en kısa kaç farklı yoldan gidilebilir?

A'dan şeklin sağ – alt köşesine 3, bu köşeden B'ye 2 birim, toplamda 5 birim yol gidilecektir.
5!, her iki aralıktaki yol sayısının faktöriyeline bölünür:

$$5! / 3! 2! = 10$$

FOKİ Örnek 37: Yukarıdaki şekle göre;

a) A'dan C'ye en kısa kaç farklı yoldan gidilebilir?

b) C'den B'ye en kısa kaç farklı yoldan gidilebilir?

c) A'dan B'ye en kısa kaç farklı yoldan gidilebilir?

a) $4! / 3! 1! = 4$

$$b) 5! / 2! 3! = 10$$

$$c) 9! / 5! 4! = 126$$

FOKİ Örnek 38: Yukarıdaki şekle göre;

a) B'ye uğramak şartıyla A'dan C'ye en kısa kaç farklı yoldan gidilebilir?

b) B'ye uğramamak şartıyla en kısa kaç farklı yoldan gidilebilir?

a) $A - B$ ve $B - C$ olmak üzere iki dizi vardır:

$$A - B: 5! / 3! 2! = 10$$

$$B - C: 4! / 2! 2! = 6$$

$$A - B - C = 10 \cdot 6 = 60$$

b) tüm durumdan B'ye uğranan durumlar çıkartılır:

$$\text{tüm durum} = 9! / 5! 4! = 126$$

$$126 - 60 = 66$$

Kombinasyon

n elemanlı bir kümenin r elemanlı alt kümelerinden her birine o kümenin r'li kombinasyonu denir.

- $n, r \in \mathbb{N}$ ve $0 \leq r \leq n$ için n elemanlı bir kümenin r elemanlı alt kümelerinin sayısı;

$$C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

- Bundan yola çıkarak:

$$C(n, 1) = n$$

$$C(n, 0) = 1$$

$$C(n, n) = 1$$

$$C(n, r) = C(n, n - r)$$

$$C(n, r) = C(n, k) \text{ ise } r = k \text{ veya } n = k + r$$

$$C(n, 0) + C(n, 1) + C(n, 2) + \dots + C(n, n) = 2^n$$

ÇK-5 Soru 1: $C(18, 2n+2) = C(18, 3n-4)$ için n değerlerini bulunuz.

$$2n + 2 = 3n - 4 \text{ için};$$

$$-n = -6, n = 6$$

$$(2n + 2) + (3n - 4) = 18 \text{ için};$$

$$5n - 2 = 18$$

$$5n = 20$$

$$n = 4$$

FOKİ Örnek 49: 5 erkek, 7 kız öğrenciden içinde en az 3 erkek bulunan 8 kişilik bir grup en çok kaç farklı şekilde oluşturulur?

3, 4 veya 5 erkek olabilir.

$$C(5, 3)C(7, 5) + C(5, 4)C(7, 4) + C(5, 5)C(7, 3) = 420$$

FOKİ Örnek 50: 3'ü aynı gün ve saatte verilen 8 seçmeli dersten 5'i tüm derslere gidilmesi şartıyla kaç farklı şekilde seçilebilir?

3 seçmeli dersten biri seçilebilir, veya hiçbiri seçilmeyebilir:

$$C(5, 5) + C(3, 1)C(5, 4) = 16$$

FOKİ Örnek 55: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kümesinin;

a) 4'lü permütasyonlarının kaçında 2 bulunur, kaçında bulunmaz?

b) 3'lü permütasyonlarının kaçında 3 ve 5 birlikte bulunur?

c) 3'lü permütasyonlarının kaçında 3 bulunur, 5 bulunmaz?

a) alt küme $\{x, y, z, 2\}$ olacağından 2 dışında kalan 5 sayıdan 3'ü seçilir:

$$C(5, 3)4! = 240$$

2 dışındaki 5 sayıdan 4'ü seçilir ve sıralanır:

$$C(5, 4)4! = 120$$

b) alt küme $\{x, 3, 5\}$ olacağından 3 ve 5 dışında kalan 4 sayıdan 1'i seçilir:

$$C(4, 1)3! = 24$$

c) alt küme $\{x, y, 3\}$ olacaktr, x ve y 5 dışındaki 4 sayıdan seçilir:

$$C(4, 2)3! = 36$$

Kombinasyonun Geometrik Yorumları

- Aynı düzlemde bulunan n nokta en çok $C(n, 2)$ farklı doğru oluşturur.

FOKİ Örnek 58: 5'i doğrusal aynı düzlemde bulunan 9 noktadan en çok kaç farklı doğru geçer?

$$C(9, 2) - C(5, 2) + 1 = 27$$

- Aynı düzlemde bulunan n farklı doğru en çok $C(n, r)$ farklı noktada kesişir.

FOKİ Örnek 60: Bir düzlemdeki 8 doğrudan 2'si paraleldir. Bu doğrular en çok kaç farklı noktada kesişir?

$$C(8, 2) - C(2, 2) = 27$$

FOKİ Örnek 61: 3'ü A noktasında kesişen düzlemsel 9 doğru en çok kaç farklı noktada kesişir?

$$C(9, 2) - C(3, 2) + 1 = 34$$

FOKİ Ekstra Örnek: Düzlemsel 10 doğrudan 3'ü A, 4'ü B noktasında kesişiyor. Bu doğrular en çok kaç farklı noktada kesişir?

$$C(10, 2) - [C(3, 2) + C(4, 2)] + 1 + 1 = 38$$

- Yarıçapları farklı n tane çember en çok $2.C(n, 2)$ noktada kesişir.
- Aynı düzlemde bulunan n tane nokta köşeleri bu noktalar olan en çok $C(n, 3)$ üçgen, $C(n, 4)$ dörtgen, $C(n, 5)$ beşgen, ... oluşturur.

FOKİ Örnek 64: Şekildeki 7 noktadan köşeleri bu noktalardan herhangi üçü olan kaç farklı üçgen oluşturulabilir?

$$C(7, 3) - C(3, 3) - C(4, 3) = 30$$

FOKİ Sınıf İçi Uygulama Soru 4: Yandaki şekil, bir kenarı 1 br olan özdeş karelerden oluşmuştur. Köşeleri şekildeki noktalardan herhangi üçü olan kaç farklı üçgen oluşturulabilir?

$$C(7, 3) - C(3, 3) - C(3, 3) - C(3, 3) - C(3, 3) = 31$$

FOKİ Örnek 67: Şekilde tepe noktası A olan kaç farklı üçgen vardır?

$$C(6, 2)C(4, 1) = 60$$

ÇK-6 Soru 2: Yandaki şekilde kaç üçgen vardır?

$$C(6, 1)C(5, 2) + C(4, 1)C(6, 2) = 120$$

FOKİ Örnek 69: Yandaki şekil bir kenarı 1 br olan özdeş karelerden oluşmuştur. Şekilde kaç dikdörtgen vardır?

$$C(5, 2)C(4, 2) = 60$$

ÇK-6 Soru 3: Yandaki şekil bir kenarı 1 br olan özdeş karelerden oluşmuştur. Şekilde alanları eş kaç farklı kare vardır?

$$3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 20$$

ÇK-6 Soru 6: Yandaki şekil üzerindeki 8 nokta ile en çok kaç farklı dörtgen çizilebilir?

$$C(8, 4) - [C(4, 4) + C(4, 3)C(4, 1)]$$

$a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ ve $n \geq r$ için;

$$(a + b)^n = \sum_{r=0}^n C(n, r) a^{n-r} b^r$$

ifadesi $(a+b)^n$ 'in a 'nın azalan kuvvetlerine göre açılımıdır. Bu ifadede $C(n, r) a^{n-r} b^r$ genel terimdir.

$(a+b)^n$ açılımında;

- $n+1$ terim vardır.
- Her terimde a ve b kuvvetleri toplamı n 'dir.
- $a = 1, b = 1$ kabul edilirse $(a+b)^n$ katsayılar toplamına eşittir.

ÇK-7 Soru 10: $m \in \mathbb{R}$ için $(mx-2y)^n$ açılımında 8 terim vardır. Katsayılar toplamı 128 olduğuna göre $m+n$ kaçtır?

$$\text{terim says} = n + 1 = 8, n = 7$$

$$x = 1, y = 1; (m - 2)^7 = 128$$

$$m - 2 = 2, m = 4$$

$$m + n = 7 + 4 = 11$$

- Baştan $r+1$. terim genel terimdir $(C(n, r) a^{n-r} b^r)$.

FOKİ Örnek 80: $(2x-y)^8 = \dots + ax^2y^6 + \dots$ açılımında a kaçtır?

$$C(8, r) 2x^{8-r} (-y)^r = ax^2y^6$$

$$r = 6$$

$$C(8, 6) (2x)^2 (-y)^6 = ax^2y^6 = 28 \cdot 4x^2y^6$$

$$a = 28 \cdot 4 = 112$$

FOKİ Örnek 82: $(x^2+1/x)^9$ açılımındaki x^3 'lü terimin katsayısını bulunuz.

$$C(9, r) (x^2)^{9-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r = kx^3$$

$$C(9, r) x^{18-2r} x^{-r} = C(9, r) x^{18-3r} = kx^3$$

$$18 - 3r = 3$$

$$3r = 15, r = 5$$

$$k = C(9, 5) = 126$$

- n çift sayı ise $C(n, n/2) a^{n/2} b^{n/2}$ ortanca terimdir.

ÇK-7 Soru 4: $(x-1/x)^4$ açılımında ortanca terimi bulunuz.

$$r = 4: 2 = 2$$

$$\text{ortanca terim} = C(4, 2)x^2 \cdot 1^2 x^{-2} = 6 \cdot 1 \cdot x^2 x^{-2} = 6$$

- a ve b kuvvetlerinin 0 olduğu terim sabit terimdir.

FOKİ Örnek 83: $(x+3/x)^6$ açılımında sabit terimi bulunuz.

$$C(6, r)x^{6-r}\left(\frac{3}{x}\right)^r = kx^0$$

$$C(6, r)x^{6-r}3^r x^{-r} = kx^0 = C(6, r)3^r x^{6-2r}$$

$$6 - 2r = 0, r = 3$$

$$\text{sabit terim} = k = C(6, 3)3^3 = 540$$

- Sondan x. terim, baştan x. terimin a ve b kuvvetlerinin yer değiştirmiş halidir.

ÇK-7 Soru 2: $(2x-y)^6$ açılımında baştan 5. terimin katsayısını bulunuz.

$$r + 1 = 5, r = 4$$

$$C(6, 4) \cdot 2x^2 \cdot (-y)^4 = 15 \cdot 4 \cdot x^2 (-y)^4$$

$$k = 15 \cdot 4 = 60$$

ÇK-7 Soru 3: $(3x+y)^8$ açılımında sondan 2. terimi bulunuz.

$$r + 1 = 2, r = 1$$

$$C(8, 1)3x^1 y^7 = 8 \cdot 3x \cdot y^7$$

$$= 24xy^7$$

Olasılık

- **Deney**, tekrarlanabilen ve her tekrarında aynı veya farklı bir sonuç veren süreçtir.
- **Çıktı**, bir deneyin verdiği sonuçtur.
- Bir deneyin mümkün tüm çıktılarının kümesi **örnek uzaydır**, E şeklinde gösterilir.
- E kümesinin her bir alt kümesine **olay** denir.
- A olayının çıktılarının dışında örnek uzaydaki tüm çıktılar A'nın **tümleyenidir**. A' şeklinde gösterilir.
- Herhangi bir E örnek uzayı için $s(A)+s(A')=s(E)$ 'dir.
- E örnek uzayında A ve B olaylarının ortak elemanı yoksa bunlar aynı anda gerçekleşmeyecek olan **ayrık olaylardır**. Bu olaylar için $A \cap B = \emptyset$ 'dir. $A \cap B \neq \emptyset$ ise A ve B olayları **ayrık olmayan olaylardır**.

- E örnek uzayında A olayının gerçekleşme olasılığı:

$$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)}$$

FOKİ Örnek 101: 6 erkek, 4 kız öğrenci arasından 3 kişilik bir çalışma grubu oluşturuluyor. Grubun;

- a) 2 erkek 1 kızdan oluşma olasılığı nedir?
- b) En az 2 erkekten oluşmuşma olasılığı nedir?
- c) En çok iki kızdan oluşma olasılığı nedir?

tüm durum: $C(10, 3)$

$$a) P = \frac{C(6, 2)C(4, 1)}{C(10, 3)} = \frac{1}{2}$$

$$b) P = \frac{C(6, 2)C(4, 1)}{C(10, 3)} + \frac{C(6, 3)}{C(10, 3)} = \frac{2}{3}$$

$$c) P = \frac{C(4, 2)C(6, 1)}{C(10, 3)} + \frac{C(6, 2)C(4, 1)}{C(10, 3)} + \frac{C(6, 3)}{C(10, 3)} = \frac{29}{30}$$

FOKİ Örnek 103: $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ kümesinden rastgele iki sayı seçiliyor.

- a) Bu sayıların çarpımının negatif olma olasılığı nedir?
- b) Bu sayıların çarpımının pozitif olma olasılığı nedir?

tüm durum: $C(6, 2)$

a) iki sayının çarpımının negatif olmas için birinin negatif birinin pozitif olmas gerekir.

$$P = \frac{C(2, 1)C(3, 1)}{C(6, 2)} = \frac{2}{5}$$

b) iki sayının çarpımının pozitif olmas için ikisinin de negatif ya da pozitif olmas gerekir.

$$P = \frac{C(2, 2) + C(3, 2)}{C(6, 2)} = \frac{4}{15}$$

FOKİ Örnek 104: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinin elemanlarıyla oluşturulan rakamları farklı 3 basamaklı sayılardan rastgele biri seçiliyor.

- a) Seçilen sayının tek olma olasılığı nedir?
- b) Seçilen sayının birler basamağının 5 olma olasılığı nedir?

tüm durum: $C(5, 3)3!$

$$a) P = \frac{C(4, 2)2!C(3, 1)}{C(5, 3)3!} = \frac{3}{5}$$

$$b) P = \frac{C(4, 2)2!}{C(5, 3)3!} = \frac{1}{5}$$

- Herhangi bir A olayı için:

$$P(A) + P(A') = 1$$

- $E = \{a, b, c, \dots, z\}$ örnek uzayı için:

$$P(a) + P(b) + P(c) + \dots + P(z) = 1$$

FOKİ Örnek 107: A ve B aynı örnek uzaya ait iki olaydır. $P(A' \cap B') = 1/6$ ve $P(A) = 1/3$ için $P(B)$ değerini bulunuz.

$$\begin{aligned}P(A' \cap B') &= P(A \cup B)' \\P(A \cup B)' + P(A) + P(B) &= 1 \\ \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + P(B) &= 1 \\ P(B) &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

FONKSİYONLAR

Fonksiyon Tanımı

Fonksiyon bir girdi ile bir çıktı arasındaki bağıntıyı tanımlar. f, g, h, gibi küçük harflerle gösterilir. Bir fonksiyonda her bir girdinin yalnızca bir çıktısı olabilir.

Fonksiyonun tüm girdilerinin kümesine tanım kümesi (A), tüm çıktıların kümesine değer kümesi (B) denir. Tanım kümesindeki her bir girdi, değer kümesinin bir alt kümesi olan görüntü kümesindeki $f(A)$ bir çıktıya eşleşir.

Tanım kümesinde boş kalan eleman olamaz, her girdinin bir çıktısı olmalıdır. Fakat değer kümesinde boş kalan (görüntü kümesi dışında kalan) elemanlar olabilir, her çıktı bir girdinin görüntüsü olmak zorunda değildir.

FOKİ Örnek 1: $f: A \rightarrow B$, $A = \{1, 3, 5, 7\}$ ve $B = \{-1, 0, 2, 4, 5\}$ için A'da 1 ve 3, B'de 0 ile; 5, 2 ile; 7, 4 ile eşleşiyor. Buna göre:

- a) f fonksiyonunu listeleyiniz.
- b) $f(A)$ kümesini listeleyiniz.
- c) Fonksiyonun tanım, değer ve görüntü kümelerini listeleyiniz.

$$a) f = \{(1, 0), (3, 0), (5, 2), (7, 4)\}$$

$$b) f(A) = \{0, 2, 4\}$$

$$c) \text{Tanım Kümesi} = \{1, 3, 5, 7\}$$

$$\text{Değer Kümesi} = \{-1, 0, 2, 4, 5\}$$

$$\text{Görüntü Kümesi} = \{0, 2, 4\}$$

A ve B boş kümeden farklı iki küme olmak üzere; $s(A)=a$ ve $s(B)=b$ için A'dan B'ye tanımlanabilecek fonksiyon sayısı n^m 'dir.

FOKİ Örnek 11: $f(x)=2^{x+1}$ için; $f(x+1)f(x-1)/f(x+2)$ ifadesinin eşitini bulunuz.

$$= \frac{2^{x+1+1}2^{x-1+1}}{2^{x+2+1}} = \frac{2^{2x+2}}{2^{x+3}} = 2^{x-1}$$

FOKİ Ekstra Örnek: $f(x+1)=f(x)+x$, $f(1)=2$ için; $f(4)$ ve $f(20)$ değerlerini bulunuz.

$$f(2) = f(1) + 1 = 3$$

$$f(3) = f(2) + 2 = 5$$

$$f(4) = f(3) + 3 = 8$$

...

$$f(x + 1) - f(x) = x$$

$$f(2) - f(1) = 1$$

$$f(3) - f(2) = 2$$

$$f(4) - f(3) = 3$$

...

$$f(20) - f(19) = 19$$

$$f(20) - f(1) = 1 + 2 + 3 + \dots + 19 = 190$$

$$f(20) = 192$$

FOKİ Örnek 13: $f(x)=f(x-1)+7$, $f(3)=5$ için $f(5)$, $f(7)$, $f(13)$ değerlerini bulunuz.

$$f(4) = f(3) + 7 = 12$$

$$f(5) = f(4) + 7 = 19$$

$$f(6) = f(5) + 7 = 26$$

$$f(7) = f(6) + 7 = 33$$

...

$$f(x) - f(x - 1) = 7$$

$$f(4) - f(3) = 7$$

$$f(5) - f(4) = 7$$

$$f(6) - f(5) = 7$$

...

$$f(13) - f(12) = 7$$

$$f(13) - f(3) = 7 + 7 + 7 + \dots + 7 \text{ (10 defa)}$$

$$f(13) = 7 \cdot 10 + 5 = 75$$

Fonksiyon Türleri

Birim Fonksiyon

$$f:A \rightarrow B, f(x)=x$$

Tanım kümesindeki her girdinin görüntü kümesinde kendisiyle eşleştiği fonksiyondur.

FOKİ Örnek 18: $f:A \rightarrow R$, $f(x)=2x-mx+4-n$ fonksiyonu birim fonksiyondur. $m+n$ değerini bulunuz.

$$x = 2x - mx + 4 - n$$

$$-x = 4 - mx - n$$

$$m = 1, n = 4$$

$$m + n = 5$$

Sabit Fonksiyon

$$f:A \rightarrow B, f(x)=c$$

Tanım kümesindeki her girdinin görüntü kümesinde aynı çıktıyla eşleştiği fonksiyondur.

Sabit fonksiyonlarda değişken kuvveti 0'dır.

FOKİ Örnek 22: $f:\mathbb{R}-\{-1/2\} \rightarrow \mathbb{R}$ için; $f(x)=(a+3)x+6/4x+2$ fonksiyonu sabit fonksiyondur. a değerini bulunuz.

x değişkenlerinin sadeleşmesi için $\frac{a+3}{4} = \frac{6}{2} = 3$ olmalıdır.

$$\frac{a+3}{4} = 3, a + 3 = 12$$

$$a = 9$$

Bire-Bir Fonksiyon

Tanım kümesindeki her girdinin görüntü kümesinde bir ve yalnız bir çıktı ile eşleştiği fonksiyondur.

Bir fonksiyonun grafiği çizildiğinde, x eksenine paralel çekilden doğrular fonksiyonun grafiğini yalnız bir yerde kesiyorsa fonksiyon bire-bir fonksiyondur.

Örten Fonksiyon

Görüntü kümesinde tanım kümesindeki hiçbir girdiyle eşleşmeyen en az bir çıktı olan fonksiyondur.

Doğrusal Fonksiyon

$$f:A \rightarrow B, f(x)=ax+b$$

şeklindeki fonksiyondur.

FOKİ Örnek 31: $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$ doğrusal fonksiyonu için; $f(1)=9$ ve $f(2)=17$ ise $f(11)$ kaçtır?

$$f(1) = a + b = 9$$

$$f(2) = 2a + b = 17$$

$$a = 8, b = 1$$

$$f(x) = 8x + 1, f(11) = 8.11 + 1 = 89$$

FOKİ Örnek 33: $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f doğrusal fonksiyon olmak üzere; $f(x)+f(x+4)=2x-8$ ise $f(3)$ kaçtır?

$$f(x) = ax + b$$

$$f(x + 4) = a(x + 4) + b = ax + 4a + b$$

$$f(x) + f(x + 4) = ax + b + ax + 4a + b$$

$$\begin{aligned}
&= 2ax + 2b + 4a = 2x - 8 \\
2a &= -2, a = 1 \\
2b + 4 &= -8 \\
b &= -6 \\
f(x) &= x - 6 \\
f(3) &= -3
\end{aligned}$$

FOKİ Sınıf İçi Uygulama Soru 6: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f doğrusal fonksiyon olmak üzere; $f(x+1)+f(x-1)=10x-12$ için $f(-2)$ değerini bulunuz.

$$\begin{aligned}
f(x) &= ax + b \\
f(x+1) &= a(x+1) + b \\
f(x-1) &= a(x-1) + b \\
ax + a + b + ax - a + b &= 10x - 12 \\
2ax + 2b &= 10x - 12 \\
ax + b &= 5x - 6 \\
a &= 5, b = -6 \\
f(x) &= 5x - 6, f(-2) = -10 - 6 = -16
\end{aligned}$$

Çift ve Tek Fonksiyonlar

Çift fonksiyon $f(-x)=f(x)$ şeklindeki fonksiyondur. Değişkenin işareti değiştiğinde hiçbir terimin işareti değişmez. Grafiği y eksenine göre simetrik.

Tek fonksiyon $f(-x)=-f(x)$ şeklindeki fonksiyondur. Değişkenin işareti değiştiğinde her terimin işareti değişir. Grafiği orijine göre simetrik.

FOKİ Örnek 36: f fonksiyonunun grafiği y eksenine göre simetrik. Buna göre $f(x)+2f(-x)=x^2+4$ ise $f(5)$ değeri kaçtır?

$$\begin{aligned}
2f(-x) &= 2f(x) \\
3f(x) &= x^2 + 4 \\
x = 5 \text{ için } 3f(5) &= 29, f(5) = 29/3
\end{aligned}$$

FOKİ Örnek 38: $f(x)=(a+1)x^5+bx^2+ax-b$ fonksiyonunun grafiği orijine göre simetrik. $f(-1)=2a$ için a değerini bulunuz.

$$\begin{aligned}
b &= 0 \\
f(x) &= (a+1)x^5 + ax \\
f(-1) &= (a+1) \cdot (-1) - a \\
-a - 1 - a &= -2a - 1 \\
-2a - 1 &= 2a \\
-1 &= 4a \\
a &= -1/4
\end{aligned}$$

Parçalı Fonksiyon

$$f(x)\{g(x); a \leq x < c$$

$$h(x); c \leq x \leq b$$

Tanım kümesinin farklı elemanları farklı kurallarla eşleşen fonksiyondur. a, b ve c noktaları aralığın uç noktalarını tanımlayan kritik noktalardır.

FOKİ Örnek 44: Bir telefon operatörünün aylık arama tarifiesi:

Toplam 150 dakikaya kadar aramalar sabit 15 TL,

150 dakikadan sonra her dakika ekstra 25 kuruş,

500 dakikadan sonra 80 TL sabit ücret.

Tarifeyi parçalı fonksiyon olarak yazınız.

$$f(x)\{15, x \leq 150$$

$$15 + (x - 150)0.25, 15 < x \leq 500$$

$$80, x > 500$$

Fonksiyonlarda Dört İşlem

$f:A \rightarrow R, g:B \rightarrow R, n \in N^+, c \in R$ için;

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$

$$fg(x)=f(x)g(x)$$

$$f/g(x)=f(x)/g(x) [g(x) \neq 0]$$

Yukarıdakilerin hepsi $A \cap B$ 'den R 'ye tanımlıdır.

$$f^n(x)=[f(x)]^n$$

$$(cf)(x)=c.f(x)$$